Algoritma Karmaşıklığı ve Büyük O Gösterimi (Big O Notation)
Yazdığımız bir algoritmanın doğru çalıştığından emin olmakla birlikte bu algoritmayı, daha önce yazılmış ve aynı sonucu veren başka algoritmalarla karşılaştırmak isteyebilirsiniz. Burada teknik olarak değerlendirilecek başlıca iki başlık söz konusudur. Birincisi algoritmaların bellek kullanım miktarı, ikincisi ise algoritmaların hesaplama yapmak için harcadığı süredir. Mesela yazdığınız bir algoritma aynı işi yapan diğer bir algoritmadan daha hızlı çalışmasına rağmen çoğu bilgisayar için bellek aşımı gerçekleştiriyorsa bu pek uygun olmayacaktır.

Elbette diğer algoritmalarla karşılaştırma yapmak yerine, yazdığınız bir algoritmanın tek başına analizini yapmak da isteyebilirsiniz. Bunun için yazdığınız algoritmaları ve varsa karşılaştıracağınız algoritmaları tek tek çalıştırıp hız ve bellek testi yapabilirsiniz. Ama bu tahmin edebileceğiniz gibi hem zaman açısından sıkıntı yaratır hem de elde edeceğiniz veriler donanımsal ve sistemsel değişikliklerden dolayı bilimsel olmaz.(Bu gibi işlemleri performans testi olarak da düşünebiliriz) . Bu durumda matematiksel olarak ifade edebileceğimiz, donanımsal ve sistemsel bağımlılığı olmayan bir yönteme ihtiyacımız olacaktır. Bu yöntemle algoritmamıza girdi olarak verilen verilerin miktarına bağlı olarak sonuçlar üretiriz. İşte elde edilen bu sonuçlar ilgili algoritmanın *karmaşıklığı* olarak tanımlanır. Bir algoritmanın karmaşıklığı performansını etkiler ama karmaşıklık ile performans farklı kavramlardır görüldüğü gibi. Karmaşıklık hesabı yapacağımız asimptotik notasyonlardan en çok kullanılanını açıklamaya çalışayım.

**Büyük O Notasyonu (Big O Notation):**

O notasyonu ilk olarak 1894 yılında Alman matematikçi Bachmann tarafından kullanılmış ve Landau tarafından da yaygınlaştırılmıştır. Bu yüzden adına Landau notasyonu veya Bachmann–Landau notasyonu da denmektedir. Algoritmanın en kötü durum analizini yapmak için kullanılan notasyondur. Matematiksel olarak şöyle tanımlanır:

f(x) ve g(x) reel sayılarda tanımlı iki fonksiyon olmak üzere, x > k olacak şekilde bir k vardır öyle ki,

|f(x)| < C*|g(x)| dir ve $f(x) \in O(g(x))$ şeklinde gösterilir. Burada C ve k sabit sayılardır ve x'ten bağımsızdırlar.

Bu tanımı bir örnekle daha açık hale getirmeye çalışayım:

$$
\begin{aligned}
|5x^3 - 2x^2 + 3| &\leq 5x^3 + |2x^2| + 3 \\
&\leq 5x^3 + 2x^3 + 3x^3 \\
&\leq 10x^3 \\
&\leq 10|x^3|
\end{aligned}
$$

Burada k = 1 (x'in 1'den büyük olduğu tüm durumlarda) ve C = 10 olarak alınmıştır.

Aşağıda O fonksiyonu ile karmaşıklık hesaplamadaki bazı ana konuları madde madde açıklamaya çalışayım:

- Sabit zamanlı ifadeler O(1) ile gösterilirler. Örnek, atama işlemleri.

- if - else ifadelerinde, ifadenin if veya else bloğundaki hangi ifade karmaşıklık olarak daha büyükse O fonksiyonu o değeri döndürür. (Çünkü biliyorsunuz ki O fonksiyonu her zaman en kötü durumu analiz eder) Yani bunu şöyle ifade edebiliriz:

**Maks (***if ifadesinin çalışma zamanı, else ifadesinin çalışma zamanı***)**

Örneğin if bloğu içi O(1) else bloğunun içi O(n) ise if – else bloğu O(n) olarak ele alınır.

```
//aşağıdaki if-else ifadesi O(n)'dir
if (ifade)
{
   //birinci ifade O(1) olsun
```

```
}
else
{
   //ikinci ifade O(n) olsun
}
```

- Bir döngü ifadesinin içindeki bir ifade, döngünün dönme sayısı kadar çalışacağı için, eğer döngü N kez dönüyorsa ve döngü içindeki ifadenin çalışma zamanı C ise, toplam çalışma zamanı N*C'dır.

```
//aşağıdaki for döngüsü O(C.N)'dir.
for (int i = 0; i < N; i++)
{
   //buradaki ifade C zamanda çalışsın
}
```

- İç içe döngülerde içteki döngü N kez, dıştaki döngü ise K kez dönüyorsa ve iç döngünün içindeki ifadenin çalışma zamanı C ise, toplam çalışma zamanı N*K*C'dir.

```
//aşağıdaki for döngüsü O(C.N.K)'dir.
for (int i = 0; i < N; i++)
{
   for (int j = 0; j < K; j++)
   {
      //buradaki ifade C zamanda çalışsın
   }
}
```

| **Notasyon** | **İsim** | **Açıklama** |
|---|---|---|
| O(1) | Sabit | Algoritmadaki icra sayısı belliyse sabit bir değerle |

| | | |
|---|---|---|
| | | gösterlir. Örneğin, bir sayının tek mi çift mi olduğunun bulunması. |
| O(logn) | Logaritmik | n değerinin büyüyen değerlerine karşın algoritmanız çok daha az yavaşlıyorsa logaritmik bir durum söz konusudur. Örneğin, binary search ile sıralı bir dizide değer aramak. |
| O(n) | Lineer | n değerinin büyümesine karşılık algoritmanın lineer bir şekilde yavaşlaması söz konusudur. Örnek, sırasız bir listeden bir değeri bulmak. |
| O(n logn) | Loglineer | Bir problemi alt problemlere bölüp bağımsız olarak çözen, daha sonra bu sonuçları birleştiren algoritmalarda görülür. Örnek, birliştirmeli sıralama (merge sort) algoritması. |
| O(n^2) | Karesel | İç-içe döngüler ile verileri ikişerli şekilde inceleyen algoritmalarda görülür. Örnek, seçmeli sıralama (selection sort) |
| O(2^n) | Üstel | Girilen veriye göre iki kat yavaşlama görülen bu algoritmalar hiç pratik değildir. Örnek, seyyar satıcı problemi. |

| $n$ | $\log n$ | $n$ | $n \log n$ | $n^2$ | $2^n$ | $n!$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | $3 \times 10^{-9}$ s | $10^{-8}$ s | $3 \times 10^{-8}$ s | $10^{-7}$ s | $10^{-6}$ s | $3 \times 10^{-3}$ s |
| $10^2$ | $7 \times 10^{-9}$ s | $10^{-7}$ s | $7 \times 10^{-7}$ s | $10^{-5}$ s | $4 \times 10^{13}$ yr | * |
| $10^3$ | $1.0 \times 10^{-8}$ s | $10^{-6}$ s | $1 \times 10^{-5}$ s | $10^{-3}$ s | * | * |
| $10^4$ | $1.3 \times 10^{-8}$ s | $10^{-5}$ s | $1 \times 10^{-4}$ s | $10^{-1}$ s | * | * |
| $10^5$ | $1.7 \times 10^{-8}$ s | $10^{-4}$ s | $2 \times 10^{-3}$ s | 10 s | * | * |
| $10^6$ | $2 \times 10^{-8}$ s | $10^{-3}$ s | $2 \times 10^{-2}$ s | 17 min | * | * |

n boyutlu problemin çeşitli algoritmalarla çözüm hızı

© algoritma.org

Dizideki sayıların toplamını bulma

İşlem sayısı

```
int Topla(int A[], int N)
{
  int topla = 0;                  --> 1

  for (i=0; i < N; i++){          --> N
    topla += A[i];                --> N
  } //Bitti-for

  return topla;                   --> 1
} //Bitti-Topla
```

--------

Toplam: 1 + N + N + 1 = 2N + 2

- Çalışma zamanı: T(N) = 2N+2
  - N dizideki sayı sayısı

## Big O devam

Bilgisayar bilimlerinde bir algoritmanın incelenmesi sırasında sıkça kullanılan bu terim çalışmakta olan algoritmanın en kötü ihtimalle ne kadar başarılı olacağını incelemeye yarar.

Bilindiği üzere bilgisayar bilimlerinde yargılamalar kesin ve net olmak zorundadır. Tahmini ve belirsiz karar verilmesi istenmeyen bir durumdur. Bir algoritmanın ne kadar başarılı

olacağının belirlenmesi de bu kararların daha kesin olmasını sağlar. Algoritmanın başarısını ise çalıştığı en iyi duruma göre ölçmek yanıltıcı olabilir çünkü her zaman en iyi durumla karşılaşılmaz.

Algoritma analizinde kullanılan en önemli iki ölçü hafıza ve zaman kavramlarıdır. Yani bir algoritmanın ne kadar hızlı çalıştığı ve çalışırken ne kadar hafıza ihtiyacı olduğu, bu algoritmanın performansını belirleyen iki farklı boyuttur.

En iyi algoritma en hızlı ve en az hafıza ihtiyacı ile çalışan algoritmadır. İşte en kötü durum analizi olayın bu iki boyutu için de kullanılabilir. Yani en kötü durumdaki hafıza ihtiyacı ve en kötü durumdaki hızı şeklinde algoritma analiz edilebilir.

Limit teorisindeki master teoremde büyük O ile gösterilen (big-oh) değer de bu en kötü durumu analiz etmektedir. Bu yüzden en kötü durum analizine, büyük O gösterimi (Big-O notation) veya algoritmanın sonsuza giderken nasıl değiştiğini anlatmak amacıyla büyüme oranı (growth rate) isimleri verilmektedir.

**Örnek**

Bir çok terimli fonksiyonun (polynomial function) big-o değerini hesaplamaya çalışalım. Örnek olarak fonksiyonumuz aşağıdaki şekilde olsun:

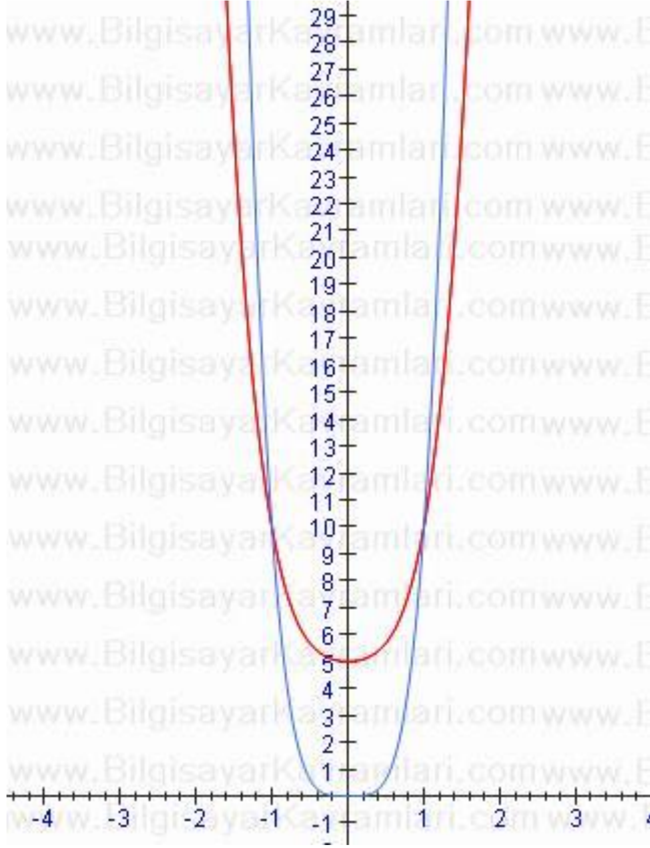
$f(x) = 3x^4+2x^2+5$

Fonksiyonun üst asimtotik sınırı (asymptotic upper bound), her zaman için fonksiyona eşit veya daha yüksek değer veren ikinci bir fonksiyondur.

Bu durumda, yukarıdaki f(x) fonksiyonu için $O(x^4)$ denilmesinin anlamlı, herhangi bir sayı ile $x^4$değerinin çarpımının, f(x) fonksiyonuna eşit veya daha yüksek üreteceğidir. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$f(x) \leq cx^4$

Gerçekten de bu değer denenirse, c=4 için aşağıdaki çizim elde edilebilir:




Yukarıdaki mavi renkte görülen fonksiyon $4x^4$ ve kırmızı renkte görülen fonksiyon da f(x) fonksiyonudur. Görüldüğü üzre x>1 için $4x^4$ fonksiyonu, f(x) fonksiyonundan büyüktür. Dolayısıyla tanımımıza x>1 koşulu eklenebilir.

Kısaca f(x) = O (g(x))

tanımı, $f(x) \leq c.g(x)$

şeklinde yorumlanabilir. Buradaki c değeri herhangi sabit bir sayıdır ve sonuçta elde edilen değer eşit veya daha büyüktür.

Büyük-O (Big-O) gösterimi ile kardeş olan bir gösterim de küçük-o (small-o) gösterimidir. Bu iki gösterim arasındaki temel fark küçük-o gösteriminde asimptotik üst sınır (asymptotic upper bound) fonksiyonunun tamamıncan büyük olmasıdır. Yani büyük-O gösterimindeki eşitlik durumu yoktur.

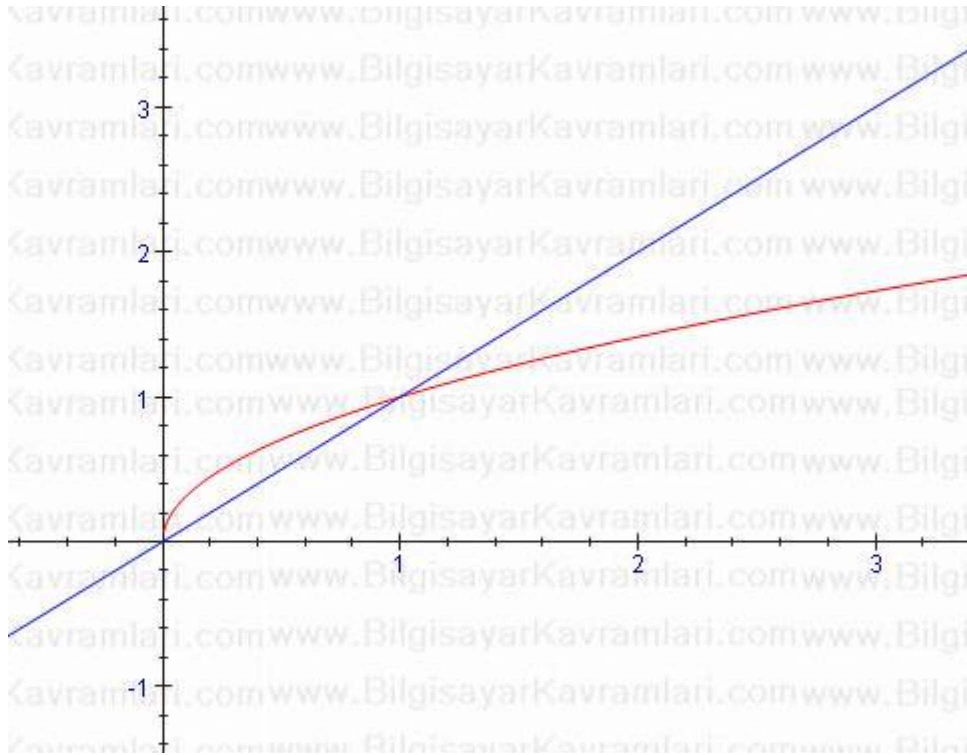
f(x) = og(x) için

$f(x) < c\ g(x)$ şartı sağlanmalıdır.

Dolayısıyla $f(x) = O(f(x))$ tanımı doğru olurken $f(x)=o(f(x))$ tanımı hatalıdır.

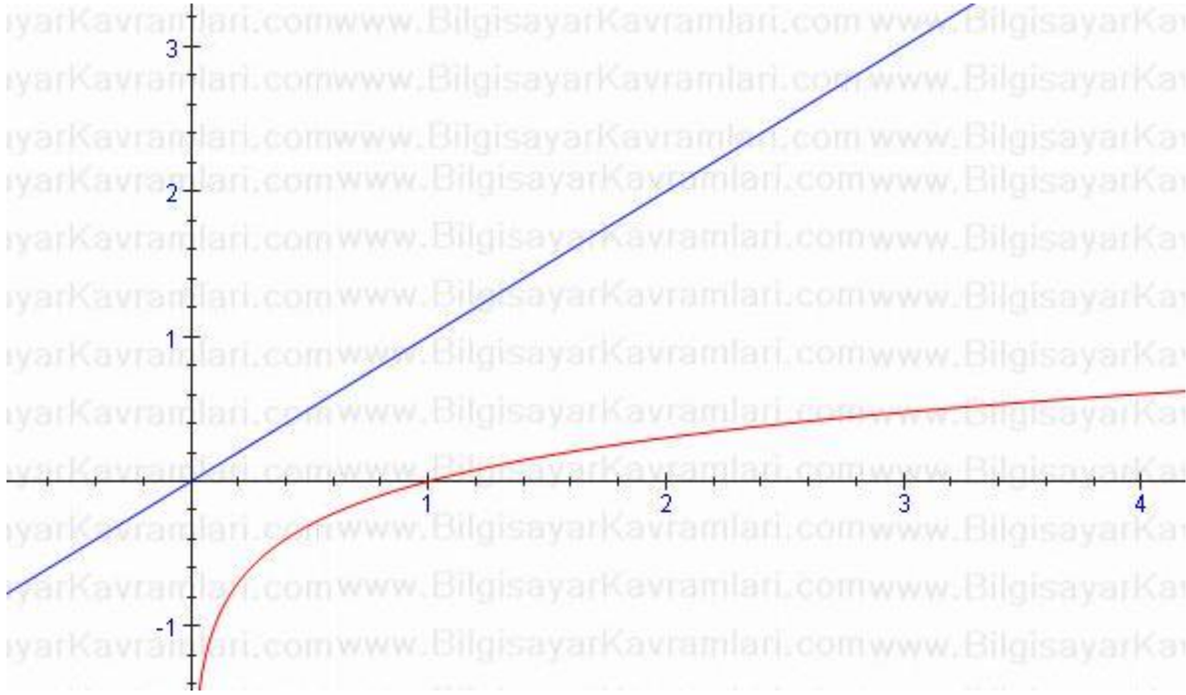
Bazı örnekler aşağıda verilmiştir:

$\sqrt{x}=o(x)$




Yukarıda görüldüğü üzere $x>1$ için $\sqrt{x}=o(x)$ doğrudur. Ancak $x\geq1$ durumunda $\sqrt{x}=O(x)$ yazılmalıdır.

$\log(x) = o(x)$




Yukarıdaki şekillerde kırmızı ile gösterilen f(x) fonksiyonlarının small-o fonksiyonları mavi renk ile çizilmiştir.

- *Ters Parça Algoritması (Reverse Factor Algorithm)*
- *Genetik Programlama (Genetic Programming)*
- *Paradigma Kayması (Paradigm Shift)*
- *Jensen Shannon Mesafesi (Jensen-Shannon Divergence)*
- *Kullback Leibler Uzaklığı (kullback-leibler divergence)*
- *Entailment (İcap)*

Soru: H(n)= 1+ 1/2 + ......+ 1/n ifadesinin algoritma karmaşıklığı nedir?

Cevap: bottom up approach kullanalim ve base line ile başlayalım:

H(1)=1

H(2) = 1 + 1/2

H(2) = H(1) + 1/2

H(3) = 1 + 1/2 +1/3

H(3) = H(2) + 1/3

demek ki H(n) = H(n-1) + 1/n

o halde O(n) denilebilir.

Benzer şekilde top down approach kullanırsak

H(n-1) = 1+ ... + 1/(n-1) şeklinde yazılabilir
H(n) = H(n-1) + 1/n olacaktır.

Bu arada, karmaşıklık konusunun yanında ufak bir dipnot olarak bu sayı gamma sabiti denilen değerdir
*gamma = 0.57721566490153286061...*